**РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ**

*Антощук Татьяна Викторовна,*

учитель математики Государственного бюджетного общеобразовательного учреждения " Средняя общеобразовательная школа № 667" Невского района Санкт-Петербурга

**Уравнение**- одно из важных понятий математики. Решение многих практических задач по математике , физике сводятся к решению уравнений. Изучение уравнений и методов их решений занимает главное место в системе математического образования школьников. Возникает необхдимость отработки различных методов решения уравнений с учениками, в соответствии с новыми подходами к обучению согласно ФГОС.

 В работе подробно рассмотрен " Метод разложения на множители" .

Суть этого метода заключается в следующем: пусть надо решить уравнение ƒ(x)=0 и пусть ƒ(x)= ƒ1(x)\* ƒ2(x)\* ƒ3(x). Тогда уравнение ƒ(x)=0 можно заменить совокупностью более простых уравнений: ƒ1(x)=0, ƒ2(x)=0, ƒ3(x)=0. Найдя, корни уравнений этой совокупности и отобрав из них те корни, которые принадлежат области определения уравнения ƒ(x)=0, мы и получим корни уравнения ƒ(x)=0.

Пример 1. Решить уравнение

Решение. Необходимо решить совокупность трех уравнений:

Таким образом, находим x1=7, x2=-1, x3=-5, x4=4.

Область определения уравнения задается условиями: x+2≥0, x-3>0.

Значит, из найденных четырех корней отбираем два: 7 и 4.

Ответ: 4; 7.

На практике при решении уравнений метод разложения на множители встречаются в других ситуаций: одно уравнение ƒ(x)=0 и надо преобразовать выражение ƒ(x) к виду ƒ1(x)\* ƒ2(x)\* ƒ3(x) с тем, чтобы превратить заданное уравнение в совокупность более простых уравнений. Тогда полезно знать различные приемы такого преобразования, т.е. приемы разложения на множители. В школе они изучаются компактно: в 7 классе – один прием, 8-ом – еще два, в 9-11 классах еще один-два.

В итоге это сводится к следующему набору приемов:

* вынесение общего множителя за скобки;
* способ группировки;
* использование формул сокращенного умножения.

Хотя на самом деле таких приемов существует гораздо больше. Рассмотрим некоторые из них.

1. **Вынесение общего множителя за скобки.**

Примет 2. Решить уравнение

Решение:

 x1=0 или

 x2=1 или x3=-3

Ответ: 0;1;-3.

1. **Применение формул сокращенного умножения.**

.

.

, где n € N.

Пример 3. Решить уравнение

Решение

x=-1 или x=1

Ответ: -1;1.

Пример 4. Решить уравнение.

Решение

x=1 или

 *D*<0, корней нет.

Ответ:1.

1. **Выделение полного квадрата.**

Пример 5.

Решение

 или =0

 корней нет

Ответ: -

Пример 6. Решить уравнение.

Решение

Ответ: -3

1. **Группировка.**

Пример 7. Решить уравнение.

Ответ:

Рассмотрим еще несколько приемов, которые позволяют решить уравнение методом разложения на множители.

1. **Метод неопределенных коэффициентов.**

Метод состоит в том, что заранее предполагается вид множителей – многочленов; на которые разлагается данный многочлен.

Метод опирается на следующее утверждения:

1. два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях х;
2. любой многочлен третьей степени разлагается в произведение линейного и квадратного множителей;
3. любой многочлен четвертой степени разлагается в произведение двух многочленов второй степени.

Пример 8. Разложить на множители многочлен.

Решение:

Будем искать многочлены () такие, что справедливо не равенство

Правую часть равенства можно записать в виде

 (1)

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях равенствах (1), получаем систему равенств для нахождения

Этим равенством удовлетворяют числа

Таким образом, многочлен разлагается на множители

1. **Метод подбора корня многочлена по его старшему и свободному коэффициенту.**

Если многочлен с целыми коэффициентами имеет рациональный корень ( где ), то делитель свободного члена , делитель старшего коэффициента .

Если подбором найдем один из корней, многочлена степени n, то многочлен можно представить в виде , где - многочлен степени n-1.

Многочлен можно найти делением многочлена на двух член «столбиком», или группировкой слагаемых многочлена и выделением из них множителя , или методом неопределенных коэффициентов.

Пример 9. Решить уравнение

Решение:

Так как коэффициент при равен 1, то рациональные корни данного многочлена, если они существуют, являются делителями числа 8, то есть

Значит, данный многочлен делится на двучлены:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

x=0

Подобным образом разложим на множители многочлен . Получим

Ответ: -1;1;2;4.

1. **Метод введения новой переменной.**

В некоторых случаях путем замены выражения *ƒ(x),* входящего в многочлен , через *у* можно получить многочлен относительно *у,* который уже легко разложить на множители. Затем после замены *у* на *ƒ(x)* получаем разложение на множители многочлена .

Пример 10. Решить уравнение.

Решение:

Пусть

 или

 уравнение не имеет корней.

Ответ: .

1. **Иногда помогает метод введения параметра**

Рассмотрим пример 11.

Решить уравнение

Решение: введём параметр , получим

 или

 Ответ: ;

1. ***Симметрические уравнения.***

Уравнения вида называются симметрическими уравнениями третьей степени.

Заметим, что =

Тогда уравнение равносильно

Пример 12. Решите уравнение

Ответ: -1.

Уравнения вида , где , называется симметрическими уравнениями четвертой степени.

Так как не является корнем уравнения, то разделим обе части уравнения на х2

Сделаем замену

Получим квадратное уравнение. Если это уравнение имеет два корня, то исходное уравнение будет равносильно совокупности уравнений.

Если квадратное уравнение будет иметь один корень, то исходное уравнение равносильно уравнению

Если квадратное уравнение не имеет корней, то исходное уравнение тоже не имеет корней.

Пример 13. Решить уравнение

Решение: так как х=0 – не является корнем уравнения, то можно разделить обе части уравнения на х2.

Получим

Пусть

Значит,

Ответ: 1; .

Пример 14. Решить уравнение.

Решение

Пусть . Тогда

По теореме обратной теореме Виета

Значит

Ответ:

Пример 15.Решить уравнение.

Решение

Пусть . Тогда

Значит

Ответ: .

1. **Уравнения четвертой степени с дополнительными условиями на коэффициенты.**

Пусть дано уравнение четвертой степени

 где

Так как не есть корень этого уравнения, то, разделив его на , получим уравнение:

Пример 16. Решить уравнение.

Решение:a=1, b=2, d=4, =4

Так как x=0 не является корнем уравнения, то разделим это уравнение на

Получим,

Пусть , тогда

 Следовательно

 или

Ответ: ,

1. **Умножение уравнения на функцию.**

Можно иногда облегчить решение уравнения, если умножение обе части уравнения на некоторую функцию – многочлен от неизвестной.

Но при этом возможно появление посторонних корней, поэтому необходимо в конце решения проверку.

Пример 17. Решите уравнение.

Решение можно умножить обе части уравнения на многочлен

Получим,

После раскрытия скобок и приведения подобных, имеем уравнение

Но, это уравнение действительных корней не имеет.

Ответ: действительных корней нет.

Пример 17. Решить уравнение.

Решение: Умножение на многочлен

Полученное уравнение является симметрическим уравнением четвертой степени. Так как х=0 не является корнем уравнения, то можно разделить обе части на

D=196

Таким образом,

Сделав проверку убеждаемся, что является посторонним корнем.

Ответ: .

1. **Угадывание корня уравнения.**

Иногда внешний вид уравнений уравнения подсказывает, какое число, является корнем уравнения.

Пример 19. Решить уравнение.

Решение: По внешнему виду уравнение можно увидеть, что х=12 есть корень уравнения.

 не имеет действительных корней.

Ответ: 12.

Пример 20. Решить уравнение

+

+

Решение: Легко увидеть, что являются решениями этого уравнения. После того как мы раскроем скобки это уравнение будет иметь вид квадратного уравнения. А это означает, что оно может иметь не более двух корней. Значит корни уравнения х=0 и х=-10.

Ответ: 0; -10.

1. **Использование симметричности уравнения.**

Пример 21. Решить уравнение

Решение: Вид уравнения подсказывает, что - корень уравнения. Однако прием, который мы применяли ранее, здесь не поможет.

Учитывая, что то данное уравнение можно записать так:

Можно запомнить, что если х0 – корень уравнения, то х1=1-х0 также его корень

Докажем, что если х1; такой что есть корень уравнения, то тоже корень этого уравнения.

Значит, если - корень данного уравнения, то оно имеет еще корни

Следовательно, уравнение имеет корни ;

Так как данное уравнение является алгебраическим уравнением шестой степени, то оно имеет не более шести корней. Таким образом все корни найдены.

Ответ:;

Метод разложения на множители особенно активно используются для двух классов уравнений: рациональных и тригонометрических. В большинстве случаев рациональные уравнения преобразуются к виду , где - многочлен.

Что касается тригонометрических уравнений, то успешное использование для решения метода разложения на множители зависит от выбора той или иной формулы тригонометрии.

Какие можно дать советы? Тригонометрические преобразования во многих случаях подчиняются трем «законом». В шутливой форме они звучат так:

1. «Увидел сумму – делай произведение». Это относится к формулам для преобразований сумм в произведение.
2. «Увидел произведение – делай сумму». Это относиться к формулам для преобразования произведений в суммы.
3. «Увидел квадрат – понижай степень». Это относиться к формулам

Пример 22. Решить уравнение.

Решение. В левой части уравнения применим «третий закон» четыре раза:

Следовательно,

Теперь в левой части уравнения применим «первый закон» два раза:

Далее имеем

cosx\*2cos5x\*sin2x=0

cosx\*sin5x\*sin2x=0

Остается решить три простых уравнения:

Заметим, что третья серия полностью включает в себя первую.

Ответ:,

Пример 23. Решить уравнение.

Решение. Начнем с трехкратного применения «второго закона»:

Воспользовавшись формулами приведения и выполнив необходимые упрощения, получим

Опять «работает» один из «законов», на этот раз первый:

Значит, либо откуда *,*

либо *cos2x=0,* откуда

Ответ: *,.*